68 Group ノ central extension ニ就テ

1947. 9. 9 (阪大) 永尾 汎

$\mathfrak{G}$ ガ normal-subgroup $\mathfrak{N}$ ヲ含ミ、且 $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{F}$ ナルトキ $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{F}$ ニ由ル extension デアルトイヒマス。先ヅ $\mathfrak{N}$ ト $\mathfrak{F}$ ヲ与ヘテ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{F}$ ニ由ル extension ヲスベテ求メル事ガ所謂 group ノ extension ノ問題デ コノ問題ニ関シテハ最初 O. Schreier ガ条件ヲ出シ 後正田先生ガ別ノ立場カラコノ条件ヲ出サレマシタ。コヽデハ $\mathfrak{N}$ モ $\mathfrak{F}$ モ共ニ有限 Abel 群トシ、$\mathfrak{N}$ ヲ center ニ含ム様ナ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{F}$ ニ由ル extension ヲ "central extension" ト呼ブコトニシテ先ヅ正田先生ノ条件ニ由リスベテノ central extension ヲ求メマス (§1) ソシテ更ニソノ central extension ノ commutator subgroup 及 center ヲ決定シ (§3) 又 extension ノ type ヲ定義シテソノ作ル群ヲ決定シタイト思ヒマス。(§4). 最後ニ種々御指導ヲ受ケマシタ正田先生ニ対シ感謝イタシマス。

§1. Fundamental theorem

先ヅ正田先生ノ定理及 Zassenhaus ノ Lehrbuch der Gruppentheorie ニアル定理ヲ証明ナシニアゲマス。

[正田ノ theorem]

$\mathfrak{F}$ ガ generator ノ set $B=\{b_i\}$ ト defining relation ノ set $R=\{r\}$ ニ由リ与ヘラレテヰルトスル。

次ノ任意ノ group $\mathfrak{N}$ ニ対シ、B カラ生成サレル free group $f(B)$ カラ $\mathfrak{N}$ ノ automorphism 全体ノ作ル group $A\mathfrak{N}$ ノ中ヘノ homomorph ナ mapping $b_i \to \beta_i$ ト R カラ生成サレル $f(B)$ ノ normal subgroup $\mathfrak{R}$ カラ $\mathfrak{N}$ ノ中ヘノ mapping $r \to A_r$ ガ次ノ条件ヲ満足スルトキ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{F}$ ニ由ル extension ガ得ラレル。

i) $A_{r_1 r_2} = A_{r_1} A_{r_2}$

ii) $A_{b_i r b_i^{-1}} = A_r^{\beta_i}$

iii) $A^{r(\beta)} = A_r A A_r^{-1}$

(コヽデAハ$\mathfrak{N}$ ノ任意ノ元．又$\Gamma(\beta)$ ハ f ノ元$\Upsilon(b)$ニ対応スル$A_{\mathfrak{N}}$ノ元)
且 コノトキ extension $\mathfrak{G}$ ハ$\mathfrak{N}$ ト$f(B)$ノ自由積＝$b_i A b_i^{-1}, A^{-\beta_i}$
$\Gamma(b) \cdot A_\Upsilon^{-1}$ ナル relotionヲ入レル事ニ由リ得ラレル。逆ニカクシテスベテノ
$\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extensionガ得ラレル。

[Lemma 1] (Zassénhuus : Lehrbuch der Gruppentheorieヨリ)

$\mathfrak{L}=(b_1)\times(b_2)\times\cdots\cdots\times(b_n)$, b_i ノ order$=t_i$ ナルAbelian group $\mathfrak{L}$ニ對シ $b_i \to \beta_i \in A_{\mathfrak{N}}$ ナル mappingト$\mathfrak{N}$ノ元 $A_i, A_{i,k}$ ($i,k=1,2,\cdots,n$; $i<k$) ガ次ノ條件ヲ満足スレバ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extensionガ得ラレル。

(1) $t_i=0$ ナラバ $A_i=1$

(2) $A^{\beta_i t_i}=A^{A_i}$ $\quad A_i^{\beta_i}=A_i$

(3) $A^{\beta_i\beta_k}=A^{A_{i,k}\beta_k\beta_i}$

(4) $A_{i,k}\ A_{k,i}=1$

(5) $A_k^{\beta_i}=A_{i,k} \quad A_{\beta_i}^{k}$ ($t_k>0$ 且 $i<k$ ナルトキ)

(6) $A_{i,k}^{\beta_l}\ A_{k,l}^{-1}\ A_{l,i}^{\beta_k}\ A_{i,k}^{-1}\ A_{k,l}\ A_{l,i}^{-1}=1$ $\quad (i<k<l)$

且コノトキ extension $\mathfrak{G}$ ハ$\mathfrak{N}$ ト$f(B)$ノ自由積＝$b_i A b_i^{-1} A^{-\beta_i}$,
$b_i b_k b_i^{-1} b_k^{-1} A_{i,k}^{-1}$, $\quad b_i^{t_i} A_i^{-1}$ ナル relationヲ入レル事ニ由リ得ラレル。逆ニカクシテスベテノ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extensionガ得ラレル。

特ニ$\mathfrak{N}$ガ Abelian group デ$\mathfrak{N}$ヲcenter ノ中ニ含ム様ナトキハ正田先生ノ theorem ニ於テ β_i ハスベテ identical ナ automorphism ニナラナケレバナラヌ。從ッテ f ト $\mathfrak{R}$ ノ commutator subgroup ヲ $f_0\mathfrak{R}$デ表ハセバ $\mathfrak{R}/f_0\mathfrak{R}$ カラ$\mathfrak{N}$ノ中ヘノ homomorph ナ mappingニ由リ$\mathfrak{N}$ノ$\mathfrak{L}$ニ由ル extension ハスベテ得ラレル。

今$\mathfrak{L}$ ヲ有限 Abel群トスル。

即チ $\quad \mathfrak{L}=(b_1)\times\cdots\cdots\times(b_n)$

b_i ノ order$=t_i$ トスル。

$\mathfrak{G}$ ノ generator ノ set トシテ $B=\{b_1,\cdots\cdots,b_n\}$ ヲトレバ. defining relation ハ $r_i=b_i^{t_i}$, $r_{i,k}=b_i b_k b_i^{-1} b_k^{-1}$ デアル. $f(B)$ デ $\{r_i, r_{i,k}\}$ カラ生成サレル normal subgroup ヲ $\mathfrak{R}$ トスレバ次ノ Lemma ガ成立スル.

[Lemma 1.2]

$\mathfrak{R}/f_0\mathfrak{R} \simeq \mathfrak{M}=(\mathfrak{W}_1)\times\cdots\times(\mathfrak{W}_n)\times(\mathfrak{W}_{1,2})\times\cdots\times(\mathfrak{W}_{i,k})\times\cdots\times(\mathfrak{W}_{n-1,n})$

ココデ $i<k$ 且 $\mathfrak{W}_i$ ノ order $=0$

$\mathfrak{W}_{i,k}$ ノ order $=t_k$ トスル.

[Proof] $\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/f_0\mathfrak{R}$ トスレバ $\bar{\mathfrak{R}}$ ハ $\bar{r}_i=r_i\mathfrak{R}'$ $(i=m+1,\cdots,n)$ ト $\bar{r}_{i,k}=r_{i,k}\mathfrak{R}'$ $(i<k)$ カラ生成サレル事ハ明カデアル.

$\mathfrak{R}$ ニ於テハ

$$r_k^{b_i}=b_i r_k b_i^{-1}=(b_i b_k b_i^{-1})^{t_k}=(r_{i,k}b_k)^{t_k}$$
$$=r_{i,k}(b_k r_{i,k} b_k^{-1})(b_k^2 r_{i,k} b_k^{-2})\cdots(b_k^{t_k-1} r_{i,k} b_k^{-(t_k-1)})$$
$$=r_{i,k}^{\,1+b_k+\cdots+b_k^{t_k-1}}\, r_k$$

故ニ $\bar{\mathfrak{R}}$ ニ於テハ $\bar{r}_k=\bar{r}_{i,k}^{\,t_k}\,\bar{r}_k$ 即チ $\bar{r}_{i,k}^{\,t_k}=1$ ヲ得ル.

故ニ $\mathfrak{W}_i\to\bar{r}_i$, $\mathfrak{W}_{i,k}\to\bar{r}_{i,k}$ ナル mapping ハ $\mathfrak{M}$ ノ $\bar{\mathfrak{R}}$ ノ上ヘノ homomorph ナ mapping ヲ与ヘル.

逆ニ Lemma 1 ニ於テスベテノ β_i ヲ identical automorphism トシ 且 $A_i=\mathfrak{W}_i$ $(m<i)$ $A_{i,k}=\mathfrak{W}_{i,k}$ トスレバ $\mathfrak{M}$ ノ $\mathfrak{G}$ ニ由ル extension ガ得ラレル事ガ分ル.

且コノ extension $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{M}$ ト $f(B)$ ノ自由積ニ $b_i\mathfrak{W}b_i^{-1}\mathfrak{W}^{-1}$, $b_i b_k b_i^{-1} b_k^{-1}\mathfrak{W}_{i,k}^{-1}$, $b_i^{t_i}\mathfrak{W}_i^{-1}$ ナル relation ヲ入レタモノデアル. 故ニ $\bar{r}_i\to\mathfrak{W}_i$, $\bar{r}_{i,k}\to\mathfrak{W}_{i,k}$ ナル mapping ハ $\bar{\mathfrak{R}}$ カラ $\mathfrak{M}$ ノ上ヘノ homomorph ナ mapping ヲ与ヘル.

ヨッテコノ定理ヲ得ル. q.e.d.

[Fundamental theorem]

M_iカラ$\mathfrak{N}$ノ中ヘノhomomorphナmappingハ$\mathfrak{N}$ヲcenterノ中ニ含ム様ナ$\mathfrak{N}$ノ$\mathfrak{B}$ニ由ルextensionヲ与ヘル。且コノトキ$\overline{m}_i \to A_i$ $\overline{m}_i \to A_i R$ナルmappingニ由リ決定サレルextension$\mathfrak{G}$ハ$\mathfrak{N}$ト$f(R)$ノ直積ニ$b_i^{\alpha_i} A_i^{-1}$, $b_i b_R b_i^{-1} A_i^{-R}$ナルrelationヲ入レタモノデアル。逆ニ任意ノ$\mathfrak{N}$ノ$\mathfrak{B}$ニ由ルcentral extensionハ上ノ様ニシテ得ラレル。

[Proof] 正田先生ノ定理及Lemma 2ニ由リ明カデアル。

[定義ト記号]

$\{A_i, A_{i,R}\}$デ$A_{i,R}^{\alpha}=E$ナル條件ヲミタス$\mathfrak{N}$ノ元ノ集合ヲfactor setトイフ。又factor setノスベテノ集合ヲ$F(\mathfrak{N}, \mathfrak{B})$デ表ハス。更ニfactor set $\{A_i, A_{iR}\}$ニ由リ決定サレル$\mathfrak{N}$ノ$\mathfrak{B}$ニ由ルcentral extensionヲ$\mathcal{E}\{\mathfrak{N}, \mathfrak{B}; A_i, A_{iR}\}$デ表ハスコトニスル。

§2 Quotient goups and subgroups of an Abelian group

$\mathfrak{a}=(a_1)\times(a_2)\times\cdots\times(a_r)$ヲinvariantガ$(s_1, s_2, \ldots, s_r)$デアル様ナAbelian groupトスル。

$$b_i=\prod_{j=1}^{r} a_j^{\beta_{ij}} \quad (i=1,\cdots,n)$$

ナルn個ノ元カラ生成サレル$\mathfrak{a}$ノsubgroupヲ$\mathfrak{B}$トスル。コノparagraphニ於テハ$\mathfrak{B}$及$\mathfrak{a}/\mathfrak{B}$ノinvarientヲ決定スル。

[Theorem 2.1]
$$B=\begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots\cdots & \beta_{1r} \\ \beta_{n1} & \cdots\cdots & \beta_{nr} \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_r \end{pmatrix}$$

トスレバ$\mathfrak{a}/\mathfrak{B}$ノinvariantハ$B^*=\binom{B}{N}$ノelementary divisorニ等シイ。

[Proof] B^*ハ明ニ$\mathfrak{a}/\mathfrak{B}$ノ生成系$\{\overline{a}_1, \cdots \overline{a}_r\}$ニ対スルmatrix of relationsナル事ヨリ明カデアル。

[Lemma 2.2] integral coefficientヲモツmatrix Qニ対シunimodularナmatrix Uヲ左カラ掛ケテUQノ各列ノ0デナイcoefficientガ高々一ツシカナイ様ニスルコトが出来ル。

[Proof] $Q=\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_r \end{pmatrix}$ (コヽデq_iハQノi-行ハベクトル)トスルトキ。

unimodularナmatrixヲ左カラ掛ケル等ニ由リi行トk行ヲトリかヘル事及ビi行ヲ$q_i+\lambda q_k$ (λハ任意ノintegerニオキカヘル事ガ出来ル，コノ二ツノ変形ヲ有限回繰返ス事ニ由リQヲ求メル形ニ変形出来ル。

[Theorem 2.3] $B'=UB=(\beta'_{ij})$ヲLemma 2.2ノ條件ヲ充リスmatrixトシ，i-行デ0デナイcoefficientガ$s_{i}, t_{i,\nu}$ $(i=1,\cdots,k)$デアルトスル。今B'ノν-列ノcoefficientデ0デナイモノガ存在スルトキ$\dfrac{s_{i,\nu}}{\beta'_{i} t_{i,\nu}}$ノleast common multipleヲ$\ell_i$トシ，スベテ0ナル時ハ$\ell_i=1$トスレバ

$\mathfrak{B}$ノinvariantハ$\begin{pmatrix} \ell_1 \ell_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ell_k \end{pmatrix}$ノelementary divisorニ一致スル。

(Proof) $b_i=\prod_{\nu=1}^{r} a_\nu^{\beta'_{i\nu}}$トスレバ仮定ニ由リ明ニ

$$\mathfrak{B}=(b'_1)\times(b'_2)\times\cdots\cdots\times(b'_n)$$

且コヽデb'_iノorderハℓ_iニ等シイ。ヨッテTheoremヲ得ル。

§3 Commutator group and center of an extension

$\mathfrak{B}=(b_1)\times\cdots\times(b_n)$，invariantヲ$(t_1, t_2, \cdots, t_n)$トシ

$\mathfrak{N}=(N_1)\times\cdots\times(N_m)$ヲinvariantガ$(s_1, s_2, \ldots, s_m)$デアル様ナAbel群デアルトシ，$\mathfrak{G}=\mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{B}; A_i, A_{i,R})$ノcommutator group及ビcenterニツイテ考ヘル。

$$A_{i,k} = N_1^{\alpha_{i,k}^{(1)}} N_2^{\alpha_{i,k}^{(2)}} \cdots\cdots N_m^{\alpha_{i,k}^{(m)}}$$ トスル。$i=k$ デアル。

$k<i$ ナルトキ $\alpha_{i,k}^{(\nu)} = -\alpha_{k,i}^{(\nu)}$，$i=k$ ナルトキ $\alpha_{i,i}^{(\nu)}=0$ トシテ

$$A_\nu = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(\nu)} & \alpha_{12}^{(\nu)} & \cdots\cdots & \alpha_{1,n}^{(\nu)} \\ \alpha_{21}^{(\nu)} & \alpha_{22}^{(\nu)} & \cdots\cdots & \alpha_{2,n}^{(\nu)} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1}^{(\nu)} & \alpha_{n2}^{(\nu)} & \cdots\cdots & \alpha_{nn}^{(\nu)} \end{pmatrix}$$ トスル。

更ニ $\mathfrak{S}_i = s_i E_n = \left.\begin{pmatrix} s_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_i \end{pmatrix}\right] n$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \mathfrak{S}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ A_2 & 0 & \mathfrak{S}_2 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ A_m & 0 & \cdots\cdots & 0 & \mathfrak{S}_m \end{pmatrix}$$ トスル。

[Theorem 3.1] $\mathfrak{G}$ ノ commutator group $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ハ $\{A_{ik}\}$ カラ生成サレル $\mathfrak{N}$ ノ subgroup デアル。ソシテ $\mathfrak{N}/\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ 及 $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ノ invariant ハ凡テ [Theorem 2.1] 及 [Theorem 2.3] ニ由リ得ラレル。

[Proof] $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{N}$ ノ元ト $\mathfrak{B}$ ノ生空間 B トデ生成サレ且 $\mathfrak{N}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ center ニ含マレル故 $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ハ B ノ元ノ commutator $\{A_{ik}\}$ カラ生成サレル $\mathfrak{N}$ ノ部分群デアル。

[Theorem 3.2]

$\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{B}$ ナル対応デ b_i ニ対応スル coset ノ代表元ヲ S_{b_i} デ表ハス事ニスル。$(x_1, \cdots, x_n, y_{11}, \cdots, y_{ik}, \cdots y_{nn})$ ニ関スル連立方程式

$$(3.1) \quad \alpha_{i,1}^{(\nu)} x_1 + \alpha_{i,2}^{(\nu)} x_2 + \cdots\cdots + \alpha_{i,n}^{(\nu)} x_n + s_\nu y_{i\nu} = 0$$

$$\nu = 1, \cdots\cdots, m \quad ; \quad i = 1, \cdots\cdots, n$$

ノ解ヲ $(\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n, \lambda_{11}, \quad , \lambda_{ik}, \cdots\cdots, \lambda_{nn})$ トスレバ、$z = \prod_{i=1}^{n} S_{b_i}^{\lambda_i}$

従ッテ $z\mathfrak{N}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ center $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ニ含マレル。

逆ニ $z = \prod_{i=1}^{n} S_{b_i}^{\lambda_i}$ ガ $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ニ含マレレバ $(\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n)$ ハ (3.1) ノ或解ノ部分ニナツテ居ル。

[Proof] $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{N} < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ナル故 $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ三元 S, S', S'' ニ対シ $(S, S'S'') = (S, S') \cdot (S, S'')$ デアル。

(コヽデ $(S,S') = SS'S^{-1}S'^{-1}$ トル。)

又 $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ナル故、$\mathfrak{G}$ ノ元 S ガ center ニ属スルタメノ完全條件ハ、任意ノ i ニ対シ $(S_{b_i}, S) = E$ ナル事デアル。

故ニ $S = \prod_{k=1}^{n} S_{b_k}^{\lambda_k} \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ナルタメノ完全條件ハ 任意ノ i ニ対シ、

$$(S_{b_i}, S) = \prod_{k=1}^{n} (S_{b_i}, S_{b_k})^{\lambda_k} = \prod_{k=1}^{n} A_{i,k}^{\lambda_k} = \prod_{\nu,k} N_\nu^{\lambda_k d_{i,k}^{(\nu)}} = E$$

即チ $(\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_m)$ ガ

$$(3,2)\begin{cases} x_1 d_{i,1}^{(1)} + \cdots\cdots + x_n d_{i,n}^{(1)} \equiv 0 & (\mathrm{mod.}\ \delta_1) \\ x_1 d_{i,1}^{(2)} + \cdots\cdots + x_n d_{i,n}^{(2)} \equiv 0 & (\mathrm{mod.}\ \delta_2) \\ \vdots & \\ x_1 d_{i,1}^{(m)} + \cdots\cdots + x_n d_{i,n}^{(m)} \equiv 0 & (\mathrm{mod.}\ \delta_m) \end{cases}$$

ノ solution デアル事デアル。故ニ $(\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_n)$ ガ (3.1) ノ solution ノ一部分ニナル事デアル。

[lemma 3,3] $\mathbb{P}A\mathbb{Q}$ ガ diagonal form ニナル様ナ unimodular ナ matrix $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ ガ存在シ且 $\mathbb{Q} = (q_1, \cdots, q_{(m+1)n})$

$$\mathbb{P}A\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & d_{r_0} & \\ 0 & & & \ddots\ 0 \end{pmatrix}$$

トスレバ (3.1) ノ solution ハ $(m+1)n - r$ 個ノ vector $q_{r+1}, \cdots, q_{(m+1)n}$ ノ linear combination デ表ハセ、又ソノ逆モ成立スル。

[Proof] $\mathbb{P}A\mathbb{Q}$ ガ diagonal form ニナル様ナ $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ ガ存在スル事ハ明デアル。

今 $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_{11} \\ \vdots \\ y_{mn} \end{pmatrix}$ トスレバ

$$A\mathfrak{x} = 0 \rightleftarrows \mathbb{P}A\mathbb{Q}\cdot\mathbb{Q}^{-1}\mathfrak{x} = 0 \rightleftarrows \mathbb{Q}^{-1}\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{r+1} \\ \vdots \\ \lambda_{(m+1)n} \end{pmatrix}$$

今 e ヲ i 番目ガ 1 デ他ハスベテ 0 ナル $(m+1)n$ 次元ノ vector トスレバ

$$\mathfrak{x} = \lambda_{r+1}\mathbb{Q}e_{r+1} + \cdots\cdots + \lambda_{(m+1)n}\mathbb{Q}e_{(m+1)n}$$
$$= \lambda_{r+1} q_{r+1} + \cdots\cdots + \lambda_{(m+1)n} q_{(m+1)n}$$

故ニ Lemma ガ成立スル。

[Theorem 3.2] ト [Theorem 3.3] ニ由リ直チニ次ノ定理ヲ得ル。

[Theorem 3.4]

[Lemma 3.3] ニ於ケル $\mathfrak{g}_i$ ヲ $\begin{pmatrix} g_{1i} \\ \vdots \\ g_{ni} \end{pmatrix}$ トスレバ、

$\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ハ $\prod_{k=1}^{n} S_{b_k}^{g_{ki}}$ $i = r+1, \cdots, (m+1)n$ ト $\mathfrak{N}$ ノ元カラ生成サレル。
従ッテ $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})/\mathfrak{N}$ ノ invariant ハ夫々 [Theorem 2.1] 及 [Theorem 2.3] ニ由リ得ラレル。

§4. Group of extensions

前ト同様ニ $\mathfrak{L} = (b_1) \times \cdots \times (b_n)$, invariant ヲ $(t_1 \cdots\cdots t_n)$ トシ $\mathfrak{N} = (N_1) \times \cdots\cdots \times (N_m)$ ヲ invariant ガ $(s_1, \cdots, s_m)$ デアル様ナ Abel 群トスル。

[Definition] $\mathfrak{G} = \mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}; A_i, A_{i,k})$ ト $\mathfrak{G}' = \mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}; B_i, B_{i,k})$ ガ $\mathfrak{N}$ ノ元ハソレ自身ガ対応シ、又 $\mathfrak{L}$ ノ元 b ニ対応スル $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ノ class ニハヤハリ b ニ対応スル $\mathfrak{G}'/\mathfrak{N}$ ノ class ガ対応スル様ナ同型対応ガ存在スルトキ $\mathfrak{G}$ ト $\mathfrak{G}'$ ハ同ジ type ノ extension デアルト定義スル。

[Theorem 4.1]

$\mathfrak{G} = \mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}; A_i, A_{i,k})$ ト $\mathfrak{G}' = \mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}; B_i, B_{i,k})$ ガ同ジ type ノ extension デアルタメノ必要且十分ナ條件ハ各 b_i ニ対応シテ $\mathfrak{N}$ ノ元 N_{b_i} ガ存在シテ

i) $B_i = A_i N_{b_i}^{t_i}$

ii) $B_{i,k} = A_{i,k}$

ナル條件ヲミタス事デアル。

[Proof]

$\mathfrak{G}$ ト $\mathfrak{G}'$ ガ同ジ type ノ extension デアルトシ、ソノ同型対応ヲ λ トスル。
仮定ヨリ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ノ $\{b_i\}$ $(i = 1, \cdots, n)$ ニ対応スル class ノ代表系 $\{S_i\}$ デ $S_i^{t_i} = A_i$, $S_i S_k S_i^{-1} S_k^{-1} = A_{i,k}$ トナルモノガトレル。

同様ニ $\mathfrak{G}'/\mathfrak{N}$ ノ代表系 $\{T_i\}$ デ

$T_i^{t_i}=B_i,\ T_i T_k T_i^{-1} T_k^{-1}=B_{i,k}$ ナルモノガトレル。

今 $\lambda(T_i)=S_i N_{b_i}$ トスレバ

$$B_i=\lambda(B_i)=\lambda(T_i^{t_i})=(\lambda(T_i))^{t_i}=(S_i N_{b_i})^{t_i}=A_i N_{b_i}^{t_i}$$

又 $B_{i,k}=\alpha(B_{i,k})=\lambda(T_i T_k T_i^{-1} T_k^{-1})$

$$=S_i N_{b_1} S_k N_{b_k}(S_i N_{b_1})^{-1}(S_k N_{b_k})^{-1}=S_i S_k S_i^{-1} S_k^{-1}=A_{i,k}$$

故ニ定理ノ條件ガ必要ナル事ガイヘタ。

逆ニ定理ノ條件ガミタサレテ居レバ，$\mathfrak{N}$ ノ元 N ニ対シテハ $\lambda(N)=N$ トシ 又 T_i ニ対シテハ $\lambda(T_i)=S_i N_{b_i}$ トシテ $\mathfrak{G}'$ カラ $\mathfrak{G}$ ノ上ヘノ対応 λ ヲ定理スレバ コレガ同型対応ヲ与ヘ 従ツテ $\mathfrak{G}$ ト $\mathfrak{G}'$ ガ同ジ type ノ extension ナル事ガ分ル。

[Definition] 二ツノ factor set $\{A_i, A_{i,k}\}$ ト $\{B_i, B_{i,k}\}$ ガ [Theorem 4.1] ノ條件ヲミタストキ equivalent デアルトイフ。且コノトキ $\{A_i, A_{i,k}\}\sim\{B_i, B_{i,k}\}$ トカク。

コレガ同値律ヲ充タス事ハ殆ンド明デアル。

[Lemma 4.2]

$\{A_i, A_{i,k}\}\circ\{B_i, B_{i,k}\}=\{A_i B_i,\ A_{i,k} B_{i,k}\}$ ニ由リ二ツノ factor set ノ間ノ積ヲ定義スレバ factor set ノ全体 $F(\mathfrak{N},\mathfrak{L})$ ハ group ヲ作ル。

且 $F(\mathfrak{N},\mathfrak{L})\simeq\mathfrak{N}_1\times\cdots\times\mathfrak{N}_n\times\mathfrak{N}_{1,2}\times\cdots\times\mathfrak{N}_{i,k}\times\cdots\times\mathfrak{N}_{n-1,n}$

コヽデ $i<k$，$\mathfrak{N}\simeq\mathfrak{N}_i$，$\mathfrak{N}_{i,k}\simeq\mathfrak{N}^{(t_k)}=\{N\mid N\in\mathfrak{N},\ N^{t_k}=E\}$ トスル。

[Proof] $A_{i,k}^{t_k}=E$. $B_{i,k}^{t_k}=E$ ナラバ $(A_{i,k}^{-1})^{t_k}=E$, $(A_{i,k}B_{i,k})^{t_k}=E$ ナル故 $F(\mathfrak{N},\mathfrak{L})$ ガ group ヲ作ル事ハ明デアル。且 factor set $\{A_i, A_{i,k}\}$ ハ A_i ハ $\mathfrak{N}$ カラ，$A_{i,k}$ ハ $\mathfrak{N}^{(t_k)}$ カラ任意ノ元ヲトル事ニ由リ得ラレル故，後半モ明デアル。

[Definition]

$\{A_i, A_{i,k}\}\sim\{A_i', A_{i,k}'\}$，$\{B_i, B_{i,k}\}\sim\{B_i', B_{i,k}'\}$ ナラバ $\{A_i B_i,$

$A_{i,k} B_{i,k}\} \sim \{A_i'-B_i', A_{i,k}' B_{i,k}'\}$ナル故 $F(\mathfrak{N},\mathfrak{L})$ヲ equivalentナclassニ分テレバ．ソレハ又abelian groupヲ作ル．ソレヲ$\mathfrak{N}$ノ$\mathfrak{L}$ニ由ルextentionノgroupトイヒ，$\mathcal{E}(\mathfrak{N},\mathfrak{L})$デ表ハス。

equivalentノ定義ヨリ直ニ$\mathcal{E}(\mathfrak{N}.\mathfrak{L})$ハ決定サレル．部分

[Theorem 4.3]

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N},\mathfrak{L}) \simeq \mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_1^{t_1} \times \cdots \times \mathfrak{N}_n/\mathfrak{N}_n^{t_n} \times \mathfrak{N}_{12} \times \cdots \times \mathfrak{N}_{n-1,n}$$

[Theorem 4.4]

$\mathcal{E}(\mathfrak{N}.\mathfrak{L})$ノorderハ $\prod_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}(s_i.t_k)^k$デアル。

コヽデ$(s_i.t_k)$ハs_iトt_kノgreatest common divisorデアル。

[Proof.] $\mathfrak{N}^{t_k}=(N_1^{t_k})\times\cdots\times(N_m^{t_k})$

$\therefore \mathfrak{N}/\mathfrak{N}^{t_k}=(N_1)/(N_1^{t_k})\times\cdots\times(N_m)/(N_m^{t_k})$

コヽデ $N_i/(N_i^{t_k})$ノorderハ(s_i,t_k) 故ニ$\mathfrak{N}/\mathfrak{N}^{t_k}$ノorderハ $\prod_{i=1}^{m}(s_i,t_k)$デアル。

又$\mathfrak{N}^{(t_k)}=(N_1^{(t_k)})\times\cdots\times(N_m)^{(t_k)}$ デ$(N_i)^{(t_k)}$ノorderハ$(s_i.t_k)$ 故ニ$\mathfrak{N}^{(t_k)}$ノorderハ $\prod_{i=1}^{m}(s_i.t_k)$

故ニ上ノ定理ヲ得ル。 q.e.d